Siki Zoltán : Regresszió számítás mérnökgeodézia feladatokban

BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék
siki@agt.bme.hu   http://www.agt.bme.hu/~siki

Összefoglalás: A mérnökgeodéziai feladatok során gyakran nem csak egy-egy pont helyzetének a meghatározására van szükség, hanem több mért pont helyzetének együttes kiértékelésére vagy deformáció vizsgálat esetén, egy vagy több pont térbeli helyzetének időbeli változás trendjének kimutatása. Ilyenkor annak az ellenőrzése a cél, hogy a mért pontok egy lineáris vagy nem lineáris alakzatra esnek-e. Ezen feladatok matematikai megoldása, mivel általában a minimálisan szükségesnél több pontot határozunk meg, a regresszió számítás alkalmazásával történet. Nem lineáris alakzatok esetén az egzakt megoldás során nehézségekbe ütközhetünk. Ilyenkor, az építőiparban gyakran előforduló forgástestek esetén, célszerűbb poláris koordinátákra áttérni és fokozatos közelítéssel megoldani a feladatot.

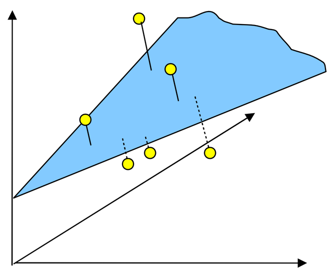
A geodéziai, fotogrammetriai, LIDAR, stb. technológiával meghatározott pontok koordinátáiból indulunk ki, ezeket mint fiktív mérési eredményeket használjuk fel a legkisebb négyzetes kiegyenlítésben, a pontokat függetlennek tekintjük. A megoldás során sokszor az V. kiegyenlítési csoporttal (kiegyenlítés mért mennyiségeket és paramétereket tartalmazó feltételi egyenletekkel) megoldható feladathoz jutunk. Ezt célszerű a numerikusabb stabilabb és hatékonyabb II. kiegyenlítési csoport összefüggéseire visszavezetni vagy a szélsőérték feladatot közvetlenül megoldani. Néhány ilyen megoldást mutatok be.

Általános helyzetű sík

$$A*x+B*y+C*z+D=0$$

Lineáris összefüggés, de ha mindhárom koordinátát hibával terheltnek tekintjük, akkor II. kiegyenlítési csoporttal nem oldható meg.

Megoldási lehetőségek:
1. V. kiegyenlítési csoporttal
2. **szélsőérték feladattal**



Normálvektor n (*A, B, C*)
Pont sík távolság $t_i = A*x_i+B*y_i+C*z_i-D$ ha |n| = 1

$$F(A,B,C,D)=\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = min! \longrightarrow \frac{\partial F}{\partial A}=\frac{\partial F}{\partial B}=\frac{\partial F}{\partial C}\frac{\partial F}{\partial D}=0$$

Súlyponti koordináta-rendszerre áttérve *D* = 0 a sík átmegy a súlyponton
Az *A, B, C* ismeretlenek meghatározása egy homogén egyenletrendszerhez vezet, melynek nem triviális megoldását a legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektor adja.
Megoldás Jacobi módszerrel.

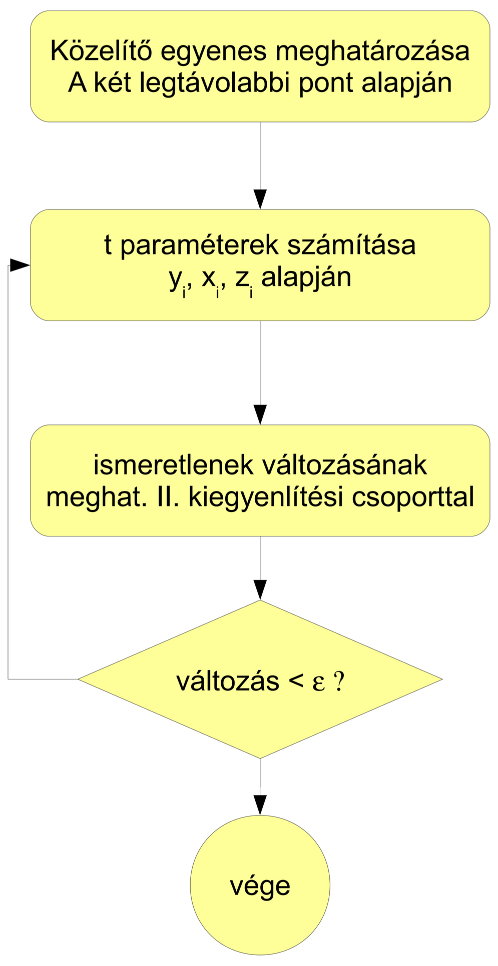
Térbeli egyenes

Paraméteres egyenlet:

$$x=x_0+a*t \qquad t \in \mathrm{R}$$
$$y=y_0+b*t$$
$$z=z_0+c*t$$

Ismeretlenek: x_0, y_0, z_0, *a, b, c*
Paraméter: *t*

Megoldási lehetőségek:
1. szélsőérték feladat (pont egyenes távolság)
2. **közelítő megoldás iterációval**



Három független lineáris egyenlet megoldása

$$x_i=x_0+a*t_i$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & t_1\\ 1 & t_2\\ . & .\end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix}x_0\\ a\end{bmatrix} \qquad l=\begin{bmatrix}x_1-x_0e-a_e*t_1\\ x_2-x_0e-a*t_2\\ .\end{bmatrix}$$

$$A^t*A=\begin{bmatrix}n & \sum t_i\\ \sum t_i & \sum t_i^2\end{bmatrix} \qquad A^t*l=\begin{bmatrix}\sum(x_i-x_{0e}-a_e*t_i)\\ \sum(t_i*(x_i-y_{0e}-a_e*t_i))\end{bmatrix} \longrightarrow \text{Súlyponton átmegy}$$

Alkalmazás: kémény, torony tengely dőlésének meghatározása, mért keresztmetszetekben kiegyenlítő kör meghatározása, majd a körök középpontjára térbeli egyenes illesztés.

Periodikus jelenségek

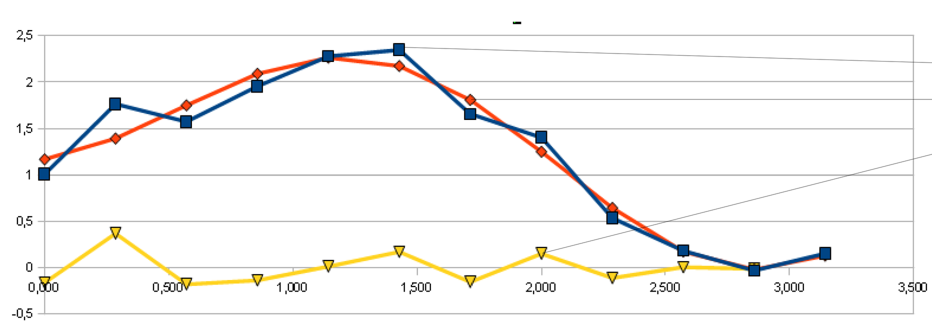
Méréseinket időnként periódusosan ismétlődő hatások befolyásolják, mint például a hőmérséklet napi változása. Ezeket a periodikus hatásokat a mérési eredményeinkre ültetett Fourier közelítéssel mutathatjuk ki, a Fourier együtthatókat kiegyenlítéssel határozhatjuk meg. A körfrekvencia értékét a feltételezett periódusidő alapján kell felvenni. A méréseknek egy periódusnál nagyobb időtartamra kell kiterjednie.

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i*\cos(i*w*t)+b_i*\sin(i*w*t)$$

Ismeretlenek az a_i, b_i együtthatók (b_0 = 0), lineáris egyenlet.
w a körfrekvencia: $w = 2\pi f = 2\pi/T$

$$A=\begin{bmatrix}1 & \cos(w*t_1) & \sin(w*t_1) & \cos(2w*t_1) & \sin(2w*t_1) & \dots\\ 1 & \cos(w*t_2) & \sin(w*t_2) & \cos(2w*t_2) & \sin(2w*t_2) & \dots\\ . & . & . & . & . & \dots\end{bmatrix} \qquad l=\begin{bmatrix}f(t_1)\\ f(t_2)\\ f(t_3)\\ \dots\end{bmatrix}$$

A kiegyenlítésből kapott együtthatók értékei alapján választhatjuk ki a jellemző frekvenciákat és ebből következtethetünk a periodicitás jellegére vagy azoktól megtisztíthatjuk a mérési sorozatot és már csak a véletlen jellegű hatásokkal foglalkozhatunk.



- mérési eredmények
- Fourier sor jellemző frekvenciái
- Periodikus hatástól megtisztított mérési adatok

Alkalmazás: hőmérséklet változás hatásának leválasztása a deformációvizsgálatok méréseiről, hurokdetektoros forgalomszámlálási adatok alapján napi, heti, évszakos periódusok kimutatása.

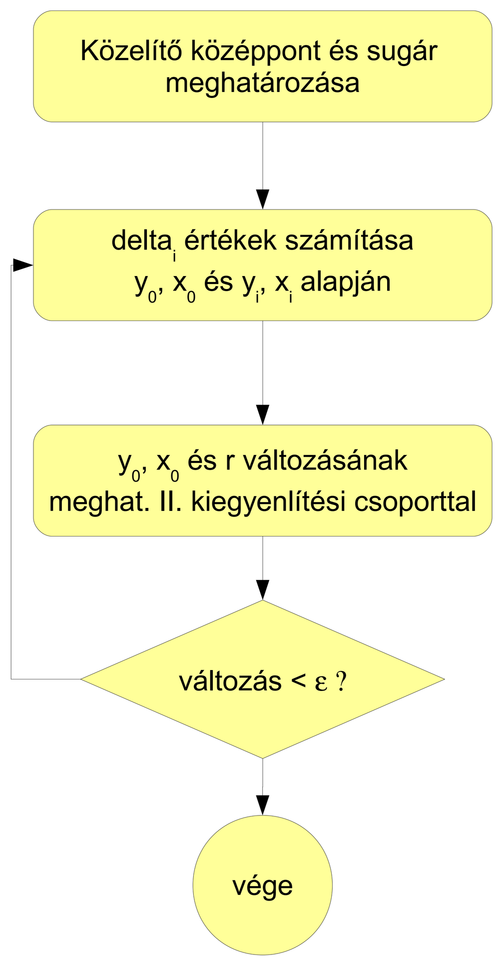
Megoldási lehetőségek

Nyiltforrású programok:
R statisztikai programcsomag http://www.r-project.org/
Octave http://www.gnu.org/software/octave/
Sage http://www.sagemath.org/

Kereskedelmi megoldás földmérőknek:
GeoEasy http://digikom.hu/szoftver/geo_easy.html

Felhasznált irodalom:
George Arthur Frederick Seber, Christopher John Wild: Nonlinear regression, Wiley-IEEE, 2003 New Jersey
Detrekői Ákos: Kiegyenlítő számítások Tankönyvkiadó 1991 Budapest
http://www.infogoaround.org/JBook/LSQ_Plane.html
http://www.infogoaround.org/JBook/LSQ_Circle.html
Siki Zoltán: GeoEasy felhasználói kézikönyv Regresszió számítás (http://www.digikom.hu/szoftver/help/reg.pdf)

Kiegyenlítő kör/függőleges henger



Nem lineáris összefüggések $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Megoldási lehetőségek:
1. Szélsőérték feladat:

$$\sum_{i=1,n}(x_i^2+y_i^2-2*x_i*x_0-2*y_i*y_0+x_0^2+y_0^2-r^2)=min!$$

2. **közelítő megoldás iterációval**

Iterációs megoldás a kör paraméteres egyenlete alapján

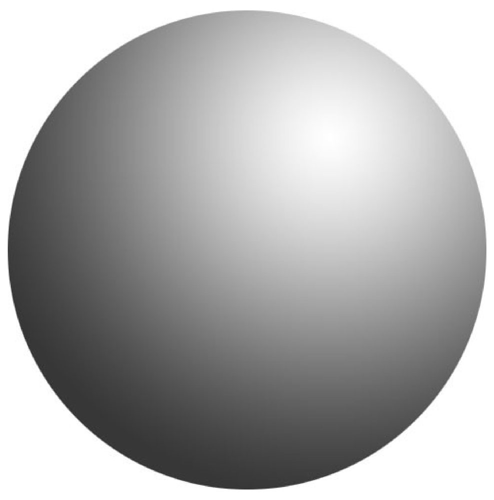
$$y_i=y_0+r*\sin(delta_i)\, x_i=x_0+r*\cos(delta_i) \qquad delta_i=\arctan\left(\frac{y_i-y_0}{x_i-x_0}\right)$$

Ismeretlenek: x_0, y_0, r paraméter: delta
Lineáris összefüggések, de $delta_i$ pontos értéke nem ismert

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & \sin(delta_1)\\ 0 & 1 & \cos(delta_1)\\ 1 & 0 & \sin(delta_2)\\ . & . & .\end{bmatrix} \qquad l=\begin{bmatrix}y_0e+r_e*\sin(delta_1)-y_1\\ x_0e+r_e*\cos(delta_1)-x_1\\ y_0e+r_e*\sin(delta_2)-y_2\\ .\end{bmatrix}$$

Alkalmazás: metró alagút ellenőrzése, fúrópajzs ellenőrzése
Forgástestek tengelyének vizsgálata

Kiegyenlítő gömb



Nem lineáris összefüggések $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

Megoldási lehetőségek:
1. Szélsőérték feladat:

$$\sum_{i=1,n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2-2*x_i*x_0-2*y_i*y_0-2*z_i*z_0+x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2)=min!$$

2. **közelítő megoldás iterációval**

Iterációs megoldás a gömb paraméteres egyenlete alapján

$$y_i=y_0+r*\cos(alfa_i)*\sin(delta_i)$$
$$x_i=x_0+r*\cos(alfa_i)*\cos(delta_i)$$
$$z_i=y_0+r*\sin(alfa_i)$$

$$delta_i=\arctan\left(\frac{y_i-y_0}{x_i-x_0}\right)$$
$$alfa_i=\arctan\left(\frac{z_i-z_0}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}}\right)$$

Ismeretlenek: x_0, y_0, z_0, *r* paraméter: *alfa, delta*
Lineáris összefüggések, de $alfa_i$, $delta_i$ pontos értéke nem ismert

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cos(alfa_1)*\sin(delta_1)\\ 0 & 1 & 0 & \cos(alfa_1)*\cos(delta_1)\\ 0 & 0 & 1 & \sin(alfa_1)\\ . & . & . & .\end{bmatrix} \qquad l=\begin{bmatrix}y_0e+r_e*\cos(alfa_1)*\sin(delta_1)-y_1\\ x_0e+r_e*\cos(alfa_1)*\cos(delta_1)-x_1\\ z_0e+r_e*\sin(alfa_1)-z_1\\ .\end{bmatrix}$$

Összetettebb alakzatok

Az építésirányítás, deformáció vizsgálat területén egyre gyakrabban találkozunk összetettebb alakzatokkal. Forgási paraboloid, kúp, hiperbolikus paraboloiddal is gyakran előfordul. Ezen alakzatokra egyszerűen általánosítható a forgástestek paraméteres felírásán alapuló iterációs módszer.

Függőleges tengelyű kúp paraméteres egyenlete, alapkör sugara R, magassága h

$x = x_0 + R*(1-v)*\sin 2\pi u \qquad y = y_0 + R*(1-v)*\cos 2\pi u \qquad z = h*v \qquad u, v \in [0,1]$

Ismeretlenek: x_0, y_0, *R, h* lineáris összefüggések

Függőleges tengelyű forgási parabola paraméteres egyenlete

$$x=x_0+u \qquad y=y_0+v \qquad z=\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{a^2}\right) \qquad u, v \in \mathrm{R}$$

Ismeretlenek: x_0, y_0, *a* nem lineáris összefüggések, sorba fejtés szükséges

Függőleges tengelyű hiperbolikus paraboloid paraméteres egyenlete

$$x=x_0+u \qquad y=y_0+v \qquad z=\left(\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{b^2}\right) \qquad u, v \in \mathrm{R}$$

Ismeretlenek: x_0, y_0, *a, b* nem lineáris összefüggések, sorba fejtés szükséges

A kiegyenlítő sík, kör, gömb, térbeli egyenes számítás megtalálható a GeoEasy Regresszió számítás modulban